

ЗАРЯЖЕННАЯ ПЛАЗМА

УДК 533.9

ДИОКОТРОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ МОДЫ $l = 1$ В ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

© 2002 г. А. В. Арефьев, И. А. Котельников*, М. Роме**, Р. Поццолли**

Техасский университет, Остин, США

**Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера, СО РАН*

***Национальный Институт физики вещества и Физический факультет
Миланского университета, Милан, Италия*

Поступила в редакцию 24.08.01 г.

Дан критический обзор линейной теории устойчивости диокотронных возмущений с $l = 1$ в однокомпонентной заряженной плазме малой плотности, удерживаемой в цилиндрической ловушке Пеннинга. Особое внимание уделяется неустойчивости, возникающей при наличии одной или более стационарных точек на радиальном профиле частоты азимутального вращения. Асимптотический анализ степенной неустойчивости, пропорциональной $t^{1/2}$, выполненный Смитом и Розенблютом для случая сплошного (односвязного) плазменного столба, обобщен в нескольких отношениях. В частности, указано на существование профилей плотности плазмы, приводящих к степенным неустойчивостям возмущений с $l = 1$, которые растут со временем пропорционально $t^{1-1/m}$ (где $m \geq 3$ – порядок стационарной точки на профиле частоты вращения) или даже пропорционально t . Показано также, что при сглаживании ступенчатого профиля плотности возмущения, нарастающие по степенному закону, могут трансформироваться в экспоненциально затухающие моды, и вычислен соответствующий декремент затухания. Асимптотический анализ (при $t \rightarrow \infty$) диокотронных возмущений с $l = 1$ обобщен на случай цилиндрической ловушки Пеннинга с дополнительным коаксиальным центральным проводником. Показано, что степенная неустойчивость, существующая в случае сплошного плазменного столба, на больших временах становится экспоненциальной. Соответствующий линейный инкремент вычислен с помощью обратного преобразования Лапласа контурным интегрированием в комплексной плоскости. Показано, что в частном случае незаряженного внутреннего проводника радиуса a инкремент неустойчивости убывает как $a^{4/3}$ при $a \rightarrow 0$. Проведено сравнение теоретических результатов с результатами численного решения линеаризованных двумерных дрейфовых уравнений Пуассона.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что заряженная плазма, состоящая из частиц одного сорта, обладает особыми свойствами. В частности, однокомпонентная заряженная плазма (ОЗП) может находиться в состоянии глобального (хотя и локализованного в пространстве) термодинамического равновесия, при котором плазма может удерживаться в цилиндрической ловушке Пеннинга с помощью статических электрических и магнитных полей в течение многих часов без видимого ухудшения параметров удержания [1]. Факт существования состояния глобального термодинамического равновесия плазмы в цилиндрической ловушке Пеннинга (рис. 1а) известен уже более двадцати лет [2–6]. В последнее время было обнаружено, что термодинамическое равновесие возможно и для трубчатой плазмы, удерживаемой в цилиндрической ловушке с коаксиальным внутренним проводником [7] (рис. 1б).

Однокомпонентная заряженная плазма с произвольным профилем плотности (в общем случае не принадлежащем классу состояний глобального термодинамического равновесия) может быть неустойчивой по отношению к малым азимутальным и аксиальным возмущениям. Детальный линейный анализ устойчивости столба ОПЗ был проведен в [8, 9]. Далее рассмотрим чисто азимутальные диокотронные возмущения, считая, что $k_z = 0$, где k_z – аксиальное волновое число. Для этого случая в рамках модели плазмы со ступенчатым радиальным профилем плотности (рис. 2а) Леви [10] показал, что бесконечно длинный столб плазмы, ограниченный по радиусу двумя цилиндрическими проводниками с фиксированными потенциалами, нейтрально устойчив, если плазма контактирует хотя бы с одним из проводников или если заряд внутреннего проводника (положительный или отрицательный) достаточно велик. В отсутствие центрального проводника диокотронная мода $l = 1$ нейтрально устойчива, в то

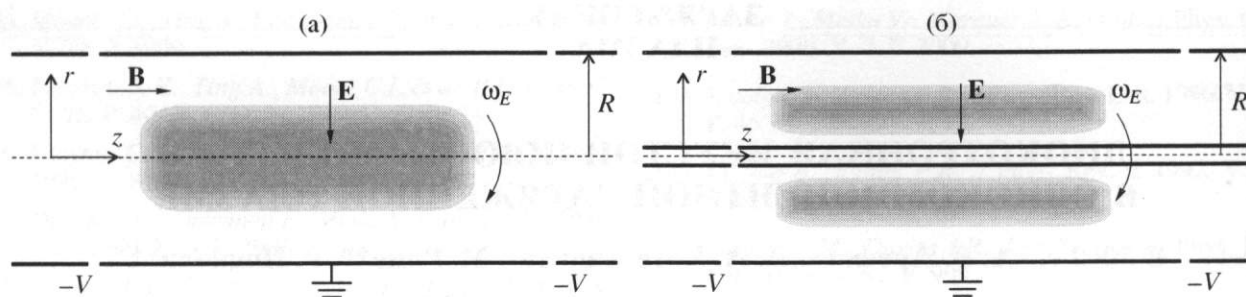


Рис. 1. Схема ловушки Пеннинга: а – обычная и б – с внутренним проводником.

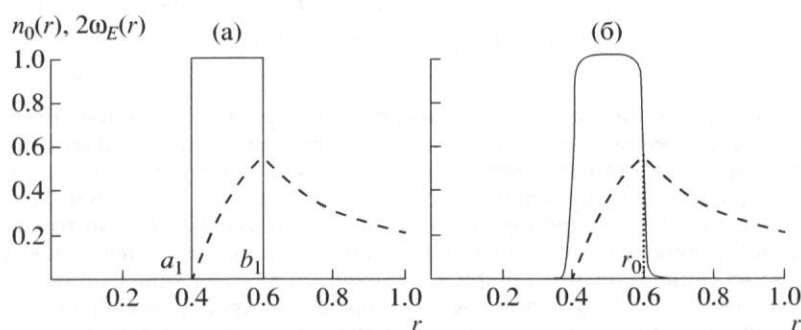


Рис. 2. Плотность плазмы и частота электрического дрейфа как функции радиуса: а – плазменный столб со ступенчатым профилем плотности; б – более реалистичный профиль. При сглаживании скачка плотности при $r = 0.6$ появляется стационарная точка на профиле частоты электрического дрейфа $r_0 \approx 0.6$, в которой $\omega_E = 0$, что приводит к возникновению степенной СР неустойчивости. В присутствии внутреннего проводника степенная неустойчивость превращается в экспоненциальную при больших временах с действительной частью частоты, близкой к $\omega_E(r_0)$.

время как моды с $l \geq 2$ могут быть неустойчивыми. Влияние центрального проводника на устойчивость трубчатого плазменного столба изучалось также экспериментально [11].

В плазме со ступенчатым профилем плотности число собственных колебаний с заданным азимутальным числом l равно числу скачков плотности [10, 12]. При сглаживании профиля плотности спектр становится непрерывным, а нейтрально устойчивые собственные колебания переходят в экспоненциально затухающие моды [13–16], за исключением случая $l = 1$, для которого нейтрально устойчивая собственная мода существует для произвольных профилей плотности плазмы [13, 17], если внутренний проводник отсутствует. Возмущения в непрерывном спектре спадают во времени по некоторому степенному закону [13–16, 18–20], вследствие чего экспоненциально затухающие собственные моды просто не видны. Обнаруженный в эксперименте [21] экспоненциальный рост диокотронных возмущений с $l = 1$ потребовал критического пересмотра прежних теоретических результатов. Решение начальной задачи, полученное в явном виде Смитом и Розенблютом [22] для частного случая $l = 1$, но произвольного

профиля плотности, показал, что в трубчатом плазменном столбе возмущения нарастают со временем как \sqrt{t} . В дальнейшем будем называть такое поведение возмущений неустойчивостью Смита–Розенблюта (СР). В [23, 24] было показано, что учет конечного размера ларморовского радиуса может объяснить экспоненциальный рост возмущений, однако предсказанный инкремент был значительно меньше наблюдаемого в эксперименте. Смит [25] показал, что поправка к азимутальной частоте вращения, связанная с конечностью длины плазменного столба, может в принципе устранить расхождение между теорией и экспериментом, однако количественное сравнение с экспериментом было затруднительным в связи со специальным подбором поправки к азимутальной частоте вращения в данной работе. В [26] эффект конечной длины плазмы был включен в квазидвумерную модель, допускающую непосредственную проверку теории. Механизм неустойчивости включает сжатие плазмы в направлении, параллельном магнитному полю, при сохранении интеграла плотности вдоль силовой линии. Этот механизм был экспериментально

проверен в [27], а его теория усовершенствована в недавно опубликованной работе [28]. Анализ ограниченных в продольном направлении диокотронных мод с учетом кинетических эффектов представлен в [29]. Для полноты картины отметим также нелинейную теорию диокотронных колебаний с $l = 1$ [30, 31]. Нелинейная стадия неустойчивости была экспериментально исследована в [32]. Было обнаружено, что электронная плазма со ступенчатым профилем может оставаться в стационарном состоянии в течение длительного времени. При этом центр вращения плазмы смещен относительно оси ловушки и дрейфует вокруг нее.

В данной работе излагается теория линейной устойчивости диокотронных возмущений с $l = 1$. Мы пренебрегаем эффектами конечной длины плазмы и конечного ларморовского радиуса и уделяем особое внимание неустойчивости, связанной с наличием одной или более стационарных точек на радиальном профиле азимутальной частоты вращения. Асимптотический анализ, выполненный Смитом и Розенблютом [22] для односвязного столба плазмы (степенная неустойчивость, пропорциональная $t^{1/2}$), обобщается на класс профилей плотности, допускающих степенной рост возмущений по закону $t^{1-1/m}$ ($m \geq 3$ – порядок стационарной точки на профиле частоты вращения) и даже пропорционально t .

Показано, что степенная неустойчивость, существующая в сплошном столбе плазмы, в ловушке Пеннинга с коаксиальным внутренним проводником трансформируется на больших временах в экспоненциальную. Соответствующий инкремент рассчитан с помощью обратного преобразования Лапласа. Теоретические результаты подтверждены численным решением двумерных дрейфовых уравнений Пуассона.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 решение начальной задачи, полученное Смитом и Розенблютом, переносится на случай ловушки Пеннинга с внутренним проводником. В разд. 3 исследуется устойчивость ОЗП с произвольным профилем плотности. В этом разделе показано, что существование точки перегиба на профиле плотности приводит к степенному нарастанию возмущений по закону $t^{2/3}$. Приведен пример профиля плотности, при котором возмущения нарастают пропорционально t . Показано также, как изменяется асимптотическое поведение начального возмущения при сглаживании резких краев ступенчатого профиля плотности. Некоторые вычисления вынесены в Приложение А. Раздел 4 посвящен анализу устойчивости плазмы в цилиндрической ловушке Пеннинга с внутренним проводником. Часть расчетов вынесена в Приложение Б, в котором используется метод, изло-

женный в Приложении А. В разд. 5 приведены основные выводы.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Двумерная динамика плотности плазмы $n(r, \theta, t)$ и электростатического потенциала $\phi(r, \theta, t)$ подчиняется уравнениям [8, 9]

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{c}{B} (\nabla \phi \times \nabla n) \cdot \mathbf{z} = 0, \quad (1a)$$

$$\Delta \phi = -4\pi en. \quad (1b)$$

Уравнения (1), известные как дрейфовые уравнения Пуассона (или двумерные МГД уравнения), описывают движение ведущих центров частиц с зарядом e . Предполагается, что заряженная плазма помещена в бесконечно длинный заземленный цилиндрический проводник радиуса R . К системе приложено однородное статическое магнитное поле $\mathbf{B} = B\mathbf{z}$, направленное вдоль оси цилиндра.

Невозмущенное равновесное состояние системы характеризуется плотностью плазмы $n_0(r)$, зависящей только от радиальной координаты. Произвольная функция $n_0(r)$ и соответствующий электростатический потенциал $\phi_0(r)$, связанные соотношением $(1/r)(d/dr)r(d/dr)\phi_0 = -4\pi en_0$, очевидным образом удовлетворяют уравнениям (1). В невозмущенном состоянии плазма вращается в азимутальном направлении с локальной скоростью $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Соответствующая угловая скорость определяется выражением

$$\omega_E(r) = \frac{c}{Br} \frac{d\phi_0}{dr} = \frac{4\pi e^2}{m\Omega r^2} \int_a^r n_0(r) r dr + \frac{2Qe}{m\Omega r^2}, \quad (2)$$

где Q – заряд на единицу длины внутреннего проводника, a – радиус внутреннего проводника, а $\Omega = -eB/mc$ – циклотронная частота, которая является положительной для отрицательно заряженных частиц. Остальные обозначения – стандартные. Угловую частоту ω_E иногда называют частотой электрического дрейфа; далее будем использовать именно этот термин. Уравнения Пуассона (1) применимы, когда плазменная частота $\omega_p = \sqrt{4\pi n e^2 / m}$ мала по сравнению с циклотронной частотой $|\Omega|$. При выполнении неравенства $\omega_p \ll |\Omega|$ дрейфовая частота также мала: $|\omega_E| \ll \omega_p$.

В дальнейшем будем использовать безразмерные величины. Плотность нормируем на некоторую заданную плотность \hat{n} ; если специально не оговорено, в качестве таковой используем максимальное значение плотности, $\hat{n} = \max[n(r)]$. Длину

нормируем на радиус внешнего цилиндрического проводника $\hat{r} = R$, потенциал – на $\hat{\phi} = 4\pi e\hat{n}\hat{r}^2$, частоту – на $\hat{\omega} = 4\pi e^2\hat{n}/m\Omega$, а электрический заряд на единицу длины внутреннего проводника – на $\hat{Q} = \pi e\hat{n}\hat{r}^2$. Нормировочные коэффициенты для ϕ и Q зависят от знака заряда, так как содержат в явном виде заряд частиц e . Нормировочный коэффициент для частоты также зависит от знака e , так как содержит циклотронную частоту Ω .

Для безразмерных величин будем использовать те же обозначения, что и для размерных. При этом, например, выражение (2) принимает форму

$$\omega_E(r) = \frac{1}{r^2} \int_a^r n_0(r) r dr + \frac{Q}{2r^2}. \quad (3)$$

Отметим также полезные соотношения

$$n_0(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r^2 \omega_E(r)], \quad Q = 2a^2 \omega_E(a).$$

Линеаризованная система уравнений (1) для возмущений $\delta\phi = \phi_l(r, t)e^{il\theta}$ и $\delta n = n_l(r, t)e^{il\theta}$ с заданным азимутальным числом l сводится к дифференциальному уравнению второго порядка для амплитуды потенциала ϕ_l (см., например, [8]):

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + il\omega_E(r) \right] \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l^2}{r^2} \right] \phi_l - \frac{il}{r} n_0'(r) \phi_l = 0, \quad (4)$$

где штрих обозначает производную по r . Уравнение (4) необходимо дополнить граничными условиями $\phi_l = 0$ при $r = a$ и $r = R$ (хотя $R = 1$ в безразмерных переменных, будем по-прежнему выписывать R в явной форме).

В дальнейшем ограничимся анализом случая $l = 1$. Известно, что в системе без внутреннего проводника линейная мода $l = 1$ нейтрально устойчива при произвольном профиле плотности $n_0(r)$ [13, 17]. Известно также, что для ступенчатого профиля плазмы мода $l = 1$ может быть экспоненциально неустойчивой при наличии внутреннего проводника [17]. Уточним эти результаты и в конечном итоге сможем проследить, как нейтрально устойчивое состояние трансформируется в степенную или экспоненциальную неустойчивость при произвольном профиле плотности плазмы как при наличии, так и в отсутствие внутреннего проводника.

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (4), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$[p + i\omega_E(r)] \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right] \phi_p - i \frac{1}{r} n_0'(r) \phi_p = -n_1(r, 0). \quad (5)$$

Как было замечено в [22], левую часть уравнения (5) можно представить в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^3 [p + i\omega_E(r)]^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\phi_p}{[p + i\omega_E(r)]}.$$

после чего уравнение (5) можно легко проинтегрировать для произвольного профиля плотности. Вводя безразмерные функции

$$h(r) = \int_a^r x^2 n_1(x, 0) dx \quad (6a)$$

$$\bar{h}(p) = \int_a^R \frac{h(x) dx}{x^3 [p + i\omega_E(x)]^2} \bigg/ \int_a^R \frac{dx}{x^3 [p + i\omega_E(x)]^2}, \quad (6b)$$

зависящие от начального возмущения плотности плазмы $n_1(r, 0)$, получаем преобразование Лапласа для возмущений потенциала и плотности:

$$\phi_p(r) = r [p + i\omega_E(r)] \int_a^R \frac{h(x) - \bar{h}(p)}{x^3 [p + i\omega_E(x)]^2} dx \quad (7a)$$

$$n_p(r) = \frac{n_1(r, 0)}{p + i\omega_E(r)} - i n_0'(r) \int_a^R \frac{h(x) - \bar{h}(p)}{x^3 [p + i\omega_E(x)]^2} dx. \quad (7b)$$

Решение для $l = -1$ легко получить из выражений (7), заменяя знак дрейфовой частоты на противоположный: $\omega_E \rightarrow -\omega_E$. Обратное преобразование Лапласа

$$\phi_1(r, t) = \int_{Br} \frac{dp}{2\pi i} \phi_p(r) e^{pt}, \quad (8a)$$

$$n_1(r, t) = \int_{Br} \frac{dp}{2\pi i} n_p(r) e^{pt}, \quad (8b)$$

включает интегрирование в комплексной плоскости по контуру Бромвича Br , который обходит справа все сингулярные точки и разрезы.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ В ОТСУТСТВИИ ВНУТРЕННЕГО ПРОВОДНИКА

При $a = 0$ обратное преобразование Лапласа можно выполнить в явном виде. Учитывая, что в этом случае $\bar{h}(p) = 0$, приходим к результату работы [22] (с исправленными опечатками):

$$\phi_1(r, t) = r \int_r^R [h(x)/x^3] [1 + i\omega_E(r)t - i\omega_E(x)t] e^{-i\omega_E(x)t} dx, \quad (9a)$$

$$n_1(r, t) = n_1(r, 0) e^{-i\omega_E(r)t} - itn_0'(r) \int_r^R [h(x)/x^3] e^{-i\omega_E(x)t} dx. \quad (9б)$$

Первое слагаемое в правой части выражения (9б) описывает азимутальное вращение начального возмущения. Зависимость дрейфовой частоты от радиуса приводит к перемешиванию фаз (аналогично тому, как это происходит при затухании Ландау), в результате чего первое слагаемое в правой части выражения (9б) становится быстро осциллирующей функцией r при $t \rightarrow \infty$. Нарастающие возмущения описываются вторым слагаемым, которое содержит множитель t . Легко видеть, что неустойчивые возмущения не могут нарастать быстрее, чем первая степень t , поскольку интегралы в выражениях (9) являются убывающими функциями времени. Подобные члены содержатся также в выражении (9а). Асимптотически незатухающее решение может быть обусловлено вкладом конечных точек интервала интегрирования в выражении (9) или стационарных точек внутри того же интервала.

3.1. Концевые точки

Если $\omega_E(r)$ является монотонно убывающей функцией r , основной вклад в уравнение (9) вносит область вблизи верхнего предела интегрирования $r = R$. Выделение этого вклада дает осциллирующее решение с частотой $\omega = \omega_E(R)$:¹

$$\phi_1 \approx - \frac{rh(R)}{\omega_E'(R)R^3} [\omega_E(r) - \omega_E(R)] e^{-i\omega_E(R)t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right). \quad (10)$$

которое представляет собой нейтрально устойчивое собственное колебание (мода Леви) с $l = 1$ [17].

¹ В [22] пропущен множитель $-\omega_E'(R)$ в знаменателе в правой части соответствующего уравнения (5)

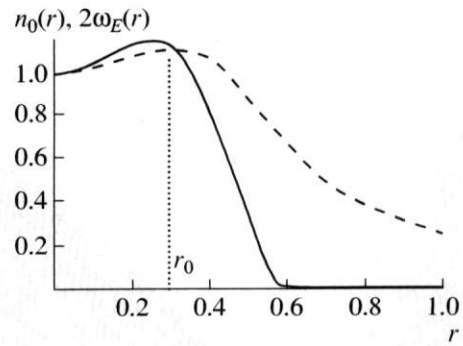


Рис. 3. Пример профилей плотности плазмы (сплошная линия) и соответствующей частоты электрического дрейфа $\omega_E(r)$ (штриховая линия), обеспечивающих развитие СР неустойчивости (рис. 4). Профиль плотности взят из [22] и задан выражением $n_0 = [1 + (r/r_p)^2/\Delta][1 - (r/r_p)^2]^2$ при $r < r_p$ и $n_0 = 0$ при $r > r_p$ с $\Delta = 0.25$ и $r_p = 0.6$.

3.2. Невырожденные стационарные точки

Если плотность плазмы является немонотонной функцией r , то дрейфовая частота $\omega_E(r)$ также может быть немонотонной. При этом точки экстремумов функции $\omega_E(r)$ являются точками стационарной фазы подынтегральной функции уравнений (9). Предположим, что $r = r_0$ - невырожденная стационарная точка ω_E , т.е. $\omega_E'(r_0) = 0$, но $\omega_E''(r_0) \neq 0$. Тогда основной вклад в асимптотическое поведение интеграла (9а) дает окрестность точки r_0 ,

$$\phi_1 \approx \frac{i\sqrt{2\pi}rh(r_0)}{\sqrt{|\omega_E''(r_0)|}r_0^3} [\omega_E(r) - \omega_E(r_0)] H(r_0 - r) \sqrt{t} \times \exp\left[-i\omega_E(r_0)t - \frac{i\pi}{4} \text{sign}(\omega_E'')\right], \quad (11)$$

где $H(x)$ - функция Хевисайда. При этом возмущения нарастают пропорционально \sqrt{t} [22]. Если $r_0 = R$, то в уравнении (11) появляется дополнительный множитель 1/2, который не учитывался в [22]. Чтобы отличить неустойчивость, описываемую уравнением (11), от аналогичных случаев, когда возмущения нарастают по степенному закону, но с иным показателем степени t , будем называть ее неустойчивостью Смита-Розенблюта. Пример профиля плотности, при котором имеет место СР неустойчивость, а также соответствующая временная зависимость амплитуды возмущения потенциала представлены на рис. 3 и 4 соответственно.

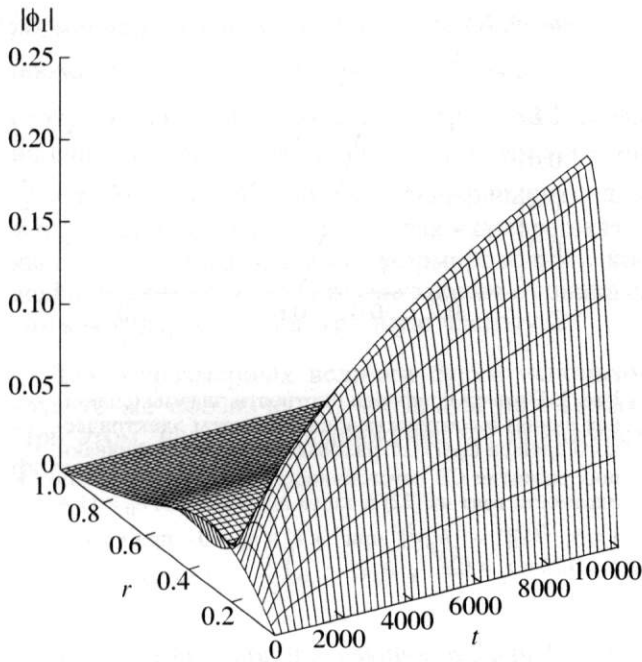


Рис. 4. Амплитуда возмущений потенциала $|\phi_1|$ как функция r и t для профиля плотности, приведенного на рис. 3. Начальное возмущение здесь и на последующих рисунках задано в виде $\delta n(r, \theta, t=0) = \epsilon n_0(r) \cos \theta$. Так как параметр ϵ может быть включен в нормировочный множитель возмущений, полагаем $\epsilon = 1$.

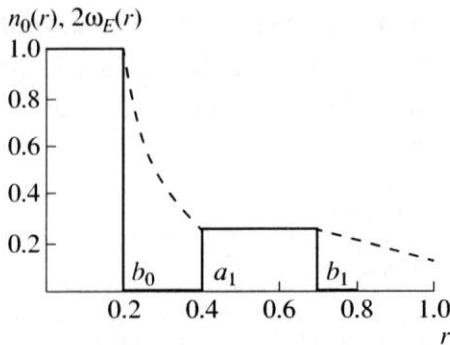


Рис. 5. Профили плотности плазмы (сплошная линия) и частоты электрического дрейфа $\omega_E(r)$ (штриховая линия), приводящие к линейному нарастанию начальных возмущений, показанному на рис. 6. Плотности плазмы во внутреннем ($r < b_0$) и внешнем ($a_1 < r < b_1$) цилиндрических слоях связаны соотношением $n_0(b_0)b_0^2 = n_0(a_1)a_1^2$.

3.3. Скачки плотности

Предположим, что плотность плазмы изменяется скачком при $r = r_s$. Тогда в той же точке имеется скачок производной дрейфовой частоты $\omega_E'(r)$. Если скачок плотности несет поверхностный заряд σ , то функция $h(r)$ также разрывна при

$r = r_s$ с величиной скачка $h(r_s + 0) - h(r_s - 0) = \sigma/r_s$. Асимптотический вклад скачка плотности в ϕ_1 ,

$$\phi_1 \approx r[\omega_E(r) - \omega_E(r_s)]H(r_s - r) \times e^{-i\omega_E(r_s)t} \left\{ \frac{h/r^3}{\omega_E'} \right\}_{r_s-0}^{r_s+0}, \quad (12)$$

описывает нейтрально устойчивое собственное колебание с частотой $\omega_E(r_s)$. Эта собственная мода была обнаружена Леви [10]. Существенно, что в области, внешней по отношению к скачку плотности, возмущения отсутствуют, то есть $\phi_1 \equiv 0$ при $r > r_s$.

3.4. Быстрая степенная неустойчивость

Столб заряженной плазмы со ступенчатым профилем плотности, когда слои постоянной плотности перемежаются с пустыми зазорами, имеет собственные моды при произвольном азимутальном числе l . При этом собственные частоты вещественны или попарно комплексно-сопряжены [13]. В первом случае собственные колебания нейтрально устойчивы; во втором случае одно из пары комплексно-сопряженных колебаний экспоненциально затухает, в то время как другое экспоненциально нарастает. Точное решение уравнения (9) показывает, что экспоненциально нарастающие собственные колебания с $l = 1$ не существуют, так как в этом случае возмущение не может нарастать быстрее, чем первая степень t . Амплитуда начальных возмущений нарастает линейно, если существует некоторый интервал, где дрейфовая частота $\omega_E(r)$ постоянна, причем этот интервал не перекрывает весь плазменный столб. На рис. 5 этот интервал находится между точками a_1 и b_1 . Частота ω_E постоянна внутри этого интервала, если плотность плазмы там также постоянна и равна средней плотности по внутренней части плазменного столба. При $t \rightarrow \infty$ возмущения потенциала отличны от нуля только в области $r < a_1$,

$$\phi_1(r) \approx itr[\omega_E(r) - \omega_E(a_1)]H(a_1 - r) \times e^{-i\omega_E(a_1)t} \int_{a_1}^{b_1} [h(x)/x^3] dx. \quad (13)$$

что подтверждается численным решением уравнения (4) (рис. 6).

² Во избежание недоразумений напомним, что это и предыдущее утверждение справедливы только в рамках двумерной электронной магнитогидродинамики, описываемой уравнением (1), и только для односвязной плазмы.

Осцилляции, нарастающие во времени по степенному закону, не являются собственными колебаниями. В следующем разделе мы покажем, что сглаживание скачков плотности приводит к экспоненциальному затуханию этих колебаний на больших временах. Неустойчивость плазмы с радиальным профилем плотности, подобным изображенному на рис. 5, не противоречит утверждению об устойчивости системы в состоянии глобального термодинамического равновесия [7]. Хотя профиль плотности каждого из двух плазменных цилиндрических слоев на рис. 5 является равновесным (в пределе $\lambda_D \rightarrow 0$), суммарный профиль не является таковым, поскольку азимутальные дрейфовые частоты для каждого из цилиндров различны.

3.5. Слияние стационарных точек

Реальный профиль плотности только в очень грубом приближении может быть представлен в виде набора ступенек с резкими краями. Проследим, как изменяется асимптотическое поведение ϕ_1 при переходе от идеализированного ступенчатого профиля плотности, показанного на рис. 2а, к сглаженному профилю, изображенному на рис. 2б. Профиль плотности на рис. 2а соответствует двум нейтрально устойчивым собственным модам. Собственная частота первой моды, описываемой выражением (10), равна $\omega_E(R)$. Она не зависит от ширины скачков плотности. Собственная частота второй моды, описываемой выражением (12), равна $\omega_E(b_1)$. При сглаживании скачка плотности вблизи $r = b_1$ возникает точка экстремума $r = r_0$, и эта мода превращается в моду, нарастающую пропорционально \sqrt{t} . Так как правая часть выражения (11) содержит множитель $|\omega_E''|^{-\frac{1}{2}}$, амплитуда неустойчивой моды примерно пропорциональна на ширине сглаженного скачка плотности.

Из примера, рассмотренного в разд. 3.4, можно заключить, что дальнейшее сглаживание профиля плотности может привести к возбуждению степенных неустойчивостей, нарастающих быстрее, чем \sqrt{t} . Более быстрый рост возмущений связан со слиянием стационарных точек, изученных в подразд. 3.2. Рассмотрим две близкие точки экстремума частоты r_+ и r_- (рис. 7а). При переходе к более гладкому профилю плотности они сливаются в точке перегиба r_* , в которой выполняется равенство $\omega_E'' = 0$ (рис. 7б). При дальнейшем сглаживании экстремумы r_+ и r_- исчезают, но точка перегиба $r = r_*$ существует как до, так и после слияния. Окрестность точки r_* дает существенный вклад в интеграл в правой части выраже-

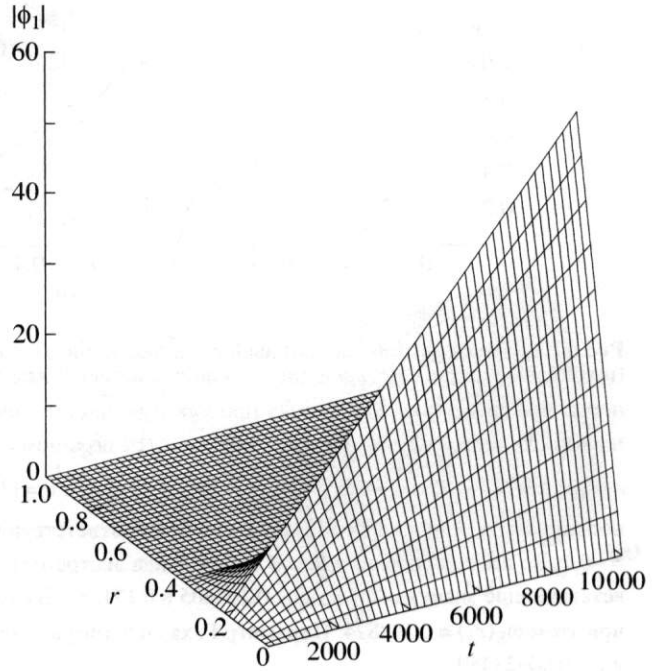


Рис. 6. Амплитуда возмущений потенциала $|\phi_1|$ как функция r и t для профиля плотности, приведенного на рис. 5.

ния (9а), определяя таким образом асимптотическое поведение начальных возмущений. Вблизи этой точки можно записать

$$\omega_E(r) \approx \omega_E(r_*) + \omega_E'(r_*)x + \omega_E'''(r_*)x^3/6, \quad (14)$$

где $x = r - r_*$, а $\omega_E''(r_*)$ играет роль малого параметра.

Если $\omega_E'(r_*)/\omega_E'''(r_*) < 0$, то функция $\omega_E(r)$ имеет два экстремума в точках $r_{\pm} = r_* \pm \sqrt{-2\omega_E'/\omega_E''}$ (рис.7а). При больших временах ($t \gg |\Gamma|^{-1}$, где $\Gamma = \sqrt{8\omega_E'^3/9\omega_E''}$) каждый из этих экстремумов дает свой отдельный вклад, описываемый выражением (11). Таким образом, возмущения потенциала представляют собой сумму двух асимптотических вкладов от точек r_+ и r_- , вследствие чего начальные возмущения растут как \sqrt{t} . На рис. 8 хорошо видны две моды, локализованные при $r < r_+ \approx 0.94$ и $r < r_- \approx 0.59$. Спектральный анализ подтверждает выводы аналитической теории, которая дает следующие величины для частоты мод: $\omega_E(r_-) = 0.0500865$ и $\omega_E(r_+) = 0.120887$. Их суперпозиция приводит к биениям во внутренней области $r < r_-$

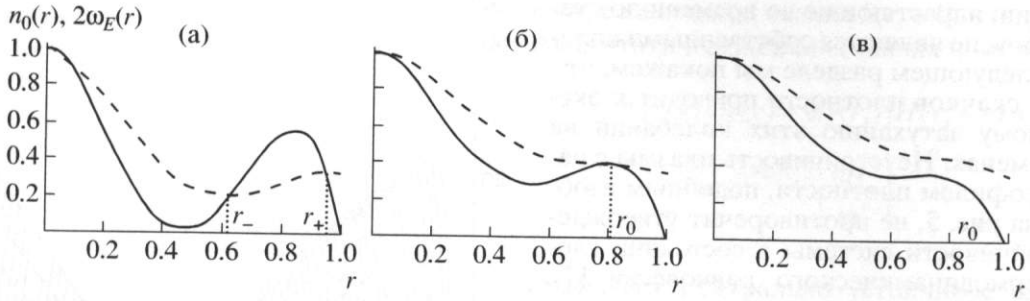


Рис. 7. Профили плотности плазмы (сплошные линии) и соответствующие профили частоты электрического дрейфа (штриховые линии), приводящие к различным сценариям линейного развития начальных возмущений: а – рост пропорционален \sqrt{t} (рис. 8); б – рост пропорционален $t^{2/3}$ (рис. 10); в – экспоненциальное затухание (рис. 11). Профили плотности во всех трех случаях описываются полиномами четвертой степени $n_0(r) = (1-r)(1+r+ar^2+br^3)$, где $a = [36\alpha + 3(3-20\alpha)r_* - 20r_*^2] / [r_*(9-20r_* + 12r_*^2)]$ и $b = [3(12\alpha r_* - 5\alpha + 3r_*^2)] / [r_*^2(9-20r_* + 12r_*^2)]$ выражены через координату r_* точки перегиба ($\omega_E''(r_*) = 0$) и соответствующее значение $\omega_E'(r_*)$ ($\alpha = \omega_E'(r_*)$): а – $\alpha = 0.3$, б – $\alpha = 0$, в – $\alpha = -0.1$. Во всех случаях $r_* = 0.8$. В случае а два экстремума расположены в точках $r_- = 0.626539$ и $r_+ = 0.942552$; соответствующие значения ω_E равны 0.108805 и 0.171385. В случае б два экстремума сливаются в точке перегиба $r_* = 0.8$; при этом $\omega_E(r_*) = 0.198824$. Параметр Γ , характеризующий удаленность двух экстремумов, равен: а – $i0.0308593$, б – 0 и в – -0.00923489 .

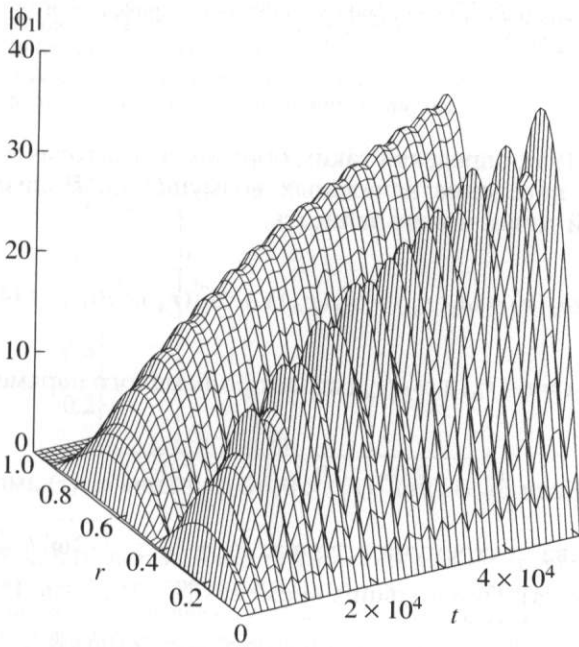


Рис. 8. Амплитуда возмущений потенциала $|\phi_1|$ как функция r и t для профиля плотности, приведенного на рис. 7а.

с периодом $T = 2\pi / |\omega_E(r_+) - \omega_E(r_-)| \approx 88.74$, который, однако, слишком мал, чтобы его различить в масштабе рис. 8. Биения хорошо видны на рис. 9. Период биений возрастает с уменьшением $\omega_E(r_*)$ и расстояния между точками экстремума r_{\pm} .

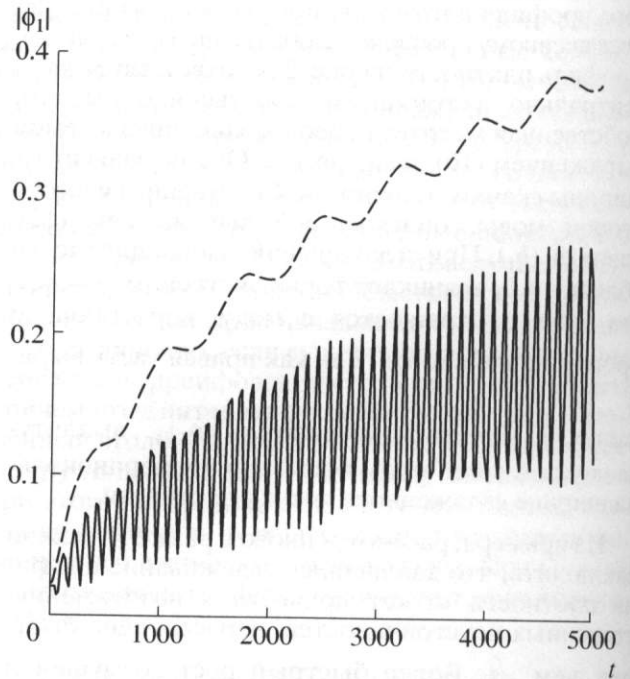


Рис. 9. Временная эволюция амплитуды возмущений потенциала $|\phi_1|$ при $r = 0.4$ (сплошная линия, ясно видны биения) и $r = 0.7$ (штриховая линия, осциллирующая без биений) для профиля плотности, приведенного на рис. 7а.

При меньших временах ($t \ll |\Gamma|^{-1}$) можно положить $\omega_E'(r_*) = 0$. Если $\omega_E'(r_*) = 0$ и стационарные точки сливаются в точке $r = r_*$, которая в данном случае является экстремумом профиля плотнос-

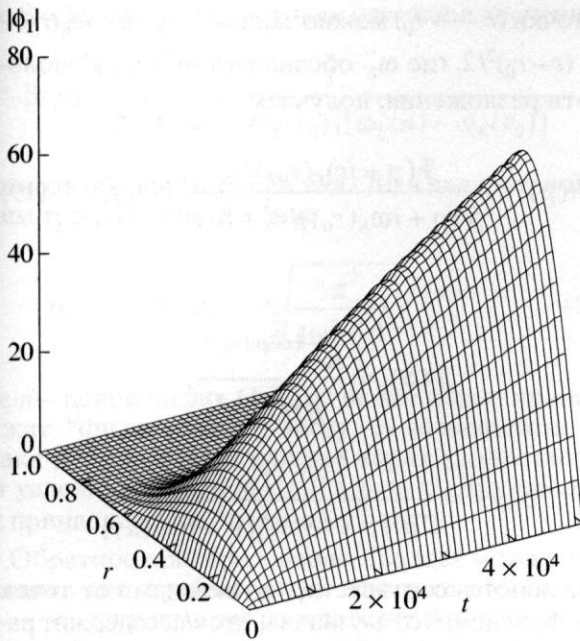


Рис. 10. Амплитуда возмущений потенциала $|\phi_1|$ как функция r и t для профиля плотности, приведенного на рис. 7б.

ти $n_0(r)$, то возмущения нарастают пропорционально $t^{2/3}$ (рис. 7б и 10):

$$\phi_1 \approx \frac{i2^{1/3}\Gamma(1/3)rh(r_*)}{3^{1/6}|\omega_E'''|^{1/3}r_*^3} [\omega_E(r) - \omega_E(r_*)] \times H(r_* - r)t^{2/3}e^{-i\omega_E t} \quad (15)$$

Наконец, если $\omega_E'(r_*)/\omega_E'''(r_*) > 0$ (рис. 7в), то экстремумы смещаются в комплексную плоскость x . При этом в начальной стадии (при $t \ll |\Gamma|^{-1}$) возмущение ϕ_1 растет по степенному закону, определяемому выражением (15) (рис. 11), а при больших временах экспоненциально затухает:

$$\phi_1 \approx \frac{i\sqrt{2\pi}rh(r_*)}{(2\omega_E'\omega_E''')^{1/4}r_*^3} [\omega_E(r) - \omega_E(r_*)] \times H(r_* - r)\sqrt{t}\exp[-i\omega_E t - \Gamma t]. \quad (16)$$

Из рис. 11 видно, что возмущения потенциала выходят на насыщение. Спектральный анализ показывает, что “насыщенные” колебания имеют частоту $\omega_E(R)$ и, следовательно, являются ни чем иным, как нейтрально устойчивыми собственными колебаниями Леви (см. выражение (10)).

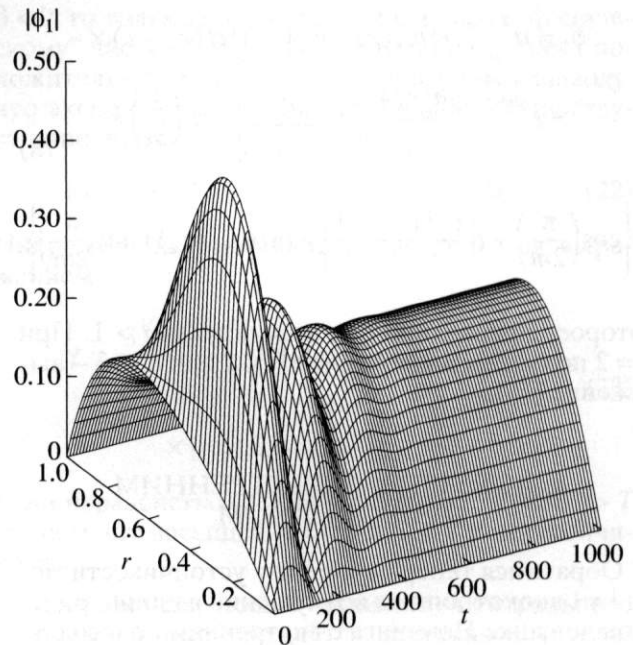


Рис. 11. Амплитуда возмущений потенциала $|\phi_1|$ как функция r и t для профиля плотности, приведенного на рис. 7в. На начальной стадии неустойчивости возмущения нарастают пропорционально \sqrt{t} . В режиме насыщения, которое достигается за относительно малое время, возмущения представляют собой собственные колебания Леви.

Используя разложение (14), можно вывести более общую формулу, которая объединяет все рассмотренные выше случаи:

$$\phi_1 \approx \frac{i\sqrt{3}rh(r_*)}{r_*^3\omega_E'(r_*)} [\omega_E(r) - \omega_E(r_*)] \times H(r_* - r)e^{-i\omega_E(r_*)t} \tau K_{1/3}(\tau). \quad (17)$$

где $\tau = \Gamma t$, а $K_{1/3}(\tau)$ – функция Макдональда порядка $1/3$.

3.6. Стационарные точки более высоких порядков

Если представить для простоты, что профиль ω_E имеет одну стационарную точку r_* порядка m (т.е. $\omega_E^{(j)}(r_*) = 0$ для всех производных порядка $j < m$ и $\omega_E^{(m)}(r_*) \neq 0$), то асимптотика возмущений потенциала описывается выражением

$$\begin{aligned} \phi_1 \approx & i t^{1-1/m} r [\omega_E(r) - \omega_E(r_*)] H(r_* - r) \times \\ & \times e^{-i\omega_E(r_*)t} \frac{h(r_*)}{r_*^3} \frac{2}{m} \left| \frac{m!}{\omega_E^{(m)}(r_*)} \right|^{1/m} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \times \\ & \times \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2m}\right) + i \left[\frac{(-1)^{m-1} - 1}{2} \right] \text{sign}(\omega_E^{(m)}(r_*)) \sin\left(\frac{\pi}{2m}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

которое справедливо для всех целых $m > 1$. При $m = 2$ получаем выражение (11), а при $m = 3$ – выражение (15).

4. ЛОВУШКА С ВНУТРЕННИМ ПРОВОДНИКОМ

Обратимся теперь к анализу устойчивости моды $l = 1$ диокотронных возмущений в цилиндрической ловушке Пеннинга с внутренним коаксиальным проводником. В этом разделе будет показано, что в присутствии центрального проводника степенная СР неустойчивость переходит на больших временах в слабую экспоненциальную, в то время как на начальной стадии развития неустойчивости сохраняется степенной рост возмущений.

В противоположность случаю, когда центральный проводник отсутствует, теперь обратное преобразование Лапласа (см. (8)) не удастся выполнить в аналитическом виде. Тем не менее асимптотический анализ все еще возможен. В Приложении А представлен альтернативный способ вывода формулы (11) путем явного интегрирования выражения (8а) по контуру на комплексной плоскости. В Приложении Б эти вычисления распространены на случай ловушки с дополнительным внутренним проводником. В данном разделе мы излагаем результаты, полученные с использованием метода, описанного в Приложении Б.

Как было показано в подразд. 3.2, СР неустойчивость определяется окрестностью невырожденной стационарной точки r_0 , в которой $\omega_E' = 0$. В Приложении А эта неустойчивость интерпретируется как вклад точки ветвления $p = -i\omega_E(r_0)$ в комплексной плоскости p . В рассматриваемом ниже случае основное отличие от Приложения А состоит в том, что функция $\bar{h}(p)$ не равна нулю.

Вблизи точки ветвления $p = -i\omega_E(r_0)$ интегралы по r , которые входят в выражение (6б) для $\bar{h}(p)$, в основном определяются окрестностью точек $r = r_0$ и $r = a$. Вблизи центрального проводника ($r \rightarrow a$) частота может быть представлена в виде разложения $\omega_E(r) \approx \omega_E(a) + \Delta\omega_E[1 - a^2/r^2]$, где $\Delta\omega_E = n_0(a)/2$ и $\omega_E(a) = Q/2a^2$. Вблизи стационар-

ной точки ($r \rightarrow r_0$) можно записать $\omega_E(r) \approx \omega_E(r_0) + \omega_E''(r - r_0)^2/2$, где ω_E'' обозначает $\omega_E''(r_0)$. Используя эти разложения, получаем

$$\bar{h}(p) = \frac{\mathcal{F}(p + i\omega_E(r_0))/r_0^3}{\mathcal{F}(p + i\omega_E(r_0))/r_0^3 + \beta(p)} h(r_0), \quad (19)$$

где

$$\mathcal{F}(\sigma) = \frac{\pi e^{-i\pi \text{sign}[\omega_E'']/4}}{\sqrt{|2\omega_E''|} \sigma^{3/2}},$$

$$\beta(p) = \frac{1}{2a^2 [p + i\Delta\omega_E][p + i\omega_E(a)]}$$

определяются соответственно вкладом от точек r_0 и a . Функция $\mathcal{F}(\sigma)$ двузначна, так как содержит рациональную степень $3/2$ величины $\sigma = p + i\omega_E(r_0)$. В Приложении А показано, что необходимо выбрать “физический” лист $\arg \sigma \in (-\pi, \pi)$ поверхности Римана, который соответствует комплексной плоскости σ с разрезом $\sigma \in (-\infty, 0]$ по отрицательной полуоси $\text{Re } \sigma$.

Для грубой оценки интеграла в выражении (8а) можно принять, что σ по порядку величины равна t^{-1} . Получаемая таким способом оценка показывает, что влияние внутреннего проводника является несущественным ($\bar{h} \ll h(r_0)$) при малых временах, $t \ll T \approx |\omega_E''|^{1/3} \omega_E^{-4/3} r_0^2 a^{-4/3}$. При больших временах ($t \gg T$) значение $\bar{h}(p)$ стремится к $h(r_0)$ в точке ветвления $p = -i\omega_E(r_0)$, так что два члена $h(x)$ и $\bar{h}(p)$ в подынтегральных выражениях в формулах (7) взаимно уничтожают друг друга, и степенная СР неустойчивость исчезает. Этот вывод может показаться парадоксальным. Если внутренний проводник очень тонкий и не заряжен, то пространственная структура возмущений потенциала может измениться только в малой окрестности самого проводника. Тем более удивительно, что такое малое изменение способно сильно повлиять на временную эволюцию возмущений. Заметим, однако, что чем тоньше внутренний проводник, тем более продолжительной является начальная стадия ($t < T$), на которой возмущения нарастают по степенному закону.

Анализ показывает, что функция $\bar{h}(p)$ имеет полюса вблизи точки ветвления. Они могут быть найдены из уравнения

$$\mathcal{F}(p + i\omega_E(r_0))/r_0^3 = -\beta, \quad (20)$$

где $\beta \approx \beta(-i\omega_E(r_0))$ имеет вещественное значение

$$\beta(p) \approx \frac{1}{2a^2 [\Delta\omega_E - \omega_E(r_0)] [\omega_E(a) - \omega_E(r_0)]}.$$

Возводя обе части уравнения (20) в квадрат, получаем три различных корня,

$$p_n = -i\omega_E(r_0) + i \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{2\omega_E'' r_0^6 \beta^2} e^{-2\pi i n/3}}, \quad (21)$$

где n – целое число. Однако не все корни принадлежат “физическому” листу. В зависимости от знака β только один или два корня удовлетворяют условию $\arg[p_n + i\omega_E(r_0)] \in (-\pi, \pi)$. Другие корни принадлежат к “смежному” листу.

Обратное преобразование Лапласа можно вычислить (по крайней мере асимптотически при $t \rightarrow \infty$), деформируя соответствующим образом контур Бромвича в пределах “физического” листа. Деформированный контур охватывает полюса преобразования Лапласа (7), а также разрезы. Вклад полюсов может быть вычислен с помощью теории вычетов. Полюса, лежащие на смежных листах, не обходятся контуром и, следовательно, не дают вклада в асимптотическое поведение возмущений. Такие полюса иногда ассоциируют с так называемыми квази модами [15, 16, 33], однако тот факт, что они не влияют на асимптотическое поведение, не достаточно хорошо освещен в литературе. Более детально этот вопрос рассмотрен в Приложении Б.

Для определенности будем считать, что кубический корень в формуле (21) имеет действительное положительное значение, если $\omega_E'' > 0$, и действительное отрицательное значение, если $\omega_E'' < 0$. Тогда из условия $\arg[p + i\omega_E(r_0)] \in (-\pi, \pi)$ получаем, что $n = 0, +1, +2$ при $\omega_E'' > 0$ и $n = 0, -1, -2$ – при $\omega_E'' < 0$.

Первый корень p_0 – чисто действительный. Второй корень $p_{\pm 1}$ (т.е. p_{+1} при $\omega_E'' > 0$ и p_{-1} при $\omega_E'' < 0$) имеет положительную вещественную часть, $\text{Re} p_{\pm 1} > 0$. Третий корень имеет отрицательную вещественную часть, $\text{Re} p_{\pm 2} < 0$. В терминах частоты $\omega = ip$ второй и третий корни образуют сопряженную пару собственных частот.

Функция $\mathcal{F}(p + i\omega_E(r_0))$ принимает отрицательные действительные значения при $p = p_0$ и $p = p_{\pm 2}$ и положительные действительные значения – при $p = p_{\pm 1}$. Это означает, что число корней на “физическом” листе зависит от знака β . Если $\beta > 0$, то уравнение (20) имеет два корня: p_0 и $p_{\pm 2}$. Если

$\beta < 0$, то только корень $p_{\pm 1}$ принадлежит “физическому” листу. Учитывая, что только $p_{\pm 1}$ имеет положительную мнимую часть, приходим к выводу, что экспоненциальная неустойчивость существует лишь при $\beta < 0$ или

$$[\omega_E(r_0) - \Delta\omega_E][\omega_E(r_0) - \omega_E(a)] > 0. \quad (22)$$

Инкремент неустойчивости определяется выражением

$$\gamma = \frac{3^{1/2} \pi^{2/3} a^{4/3}}{2^{2/3} r_0^2 |\omega_E''|^{1/3}} [\omega_E(r_0) - \omega_E(a)]^{2/3} \times [\omega_E(r_0) - \Delta\omega_E]^{2/3}. \quad (23)$$

Если неравенство (22) не выполнено, то при $t > T$ происходит насыщение степенной СР неустойчивости.

Дестабилизирующее влияние центрального проводника подтверждается численным моделированием, проведенным для профиля плотности, показанного на рис. 3. Если центральный проводник отсутствует, то в этом случае имеет место СР неустойчивость (рис. 4). Мы провели численное моделирование для того же профиля плотности с внутренним проводником радиуса $a = 0.05$ и электрическим зарядом на единицу длины $Q = 2 \int_0^a n_0(x) dx$, который в точности компенсирует заряд удаленных частиц, так что радиальный профиль частоты ω_E в области, занятой плазмой, не изменяется. На рис. 12 хорошо видно, что в этом случае динамика возмущений потенциала качественно отличается от приведенной на рис. 4.

Дальнейшее сравнение проведено для обобщенного параболического профиля плотности, показанного на рис. 13. Этот профиль плотности обеспечивает более реалистичную аппроксимацию экспериментальных условий, так как плотность плазмы обращается в нуль вблизи внутреннего проводника. Инкременты неустойчивости оценивались с помощью численного решения задачи на собственное значение методом конечных разностей. Рассчитанные аналитически и численно значения инкремента γ обычно согласуются с точностью до 10% для достаточно малых значений радиуса внутреннего проводника ($a \leq 0.05$) при использовании пространственной сетки с 800 узлами на интервале $r \in [a, R]$. Повышая количество узлов сетки, можно достичь еще лучшего согласования.

Частотный спектр, рассчитанный численно для нескольких значений a , представлен на рис. 14. Число решений с $\text{Im} \omega = 0$ возрастает с увеличением количества радиальных узлов сетки. Это указывает на то, что эти решения отвечают непрерывному спектру. Область значений $\text{Re} \omega$ соот-

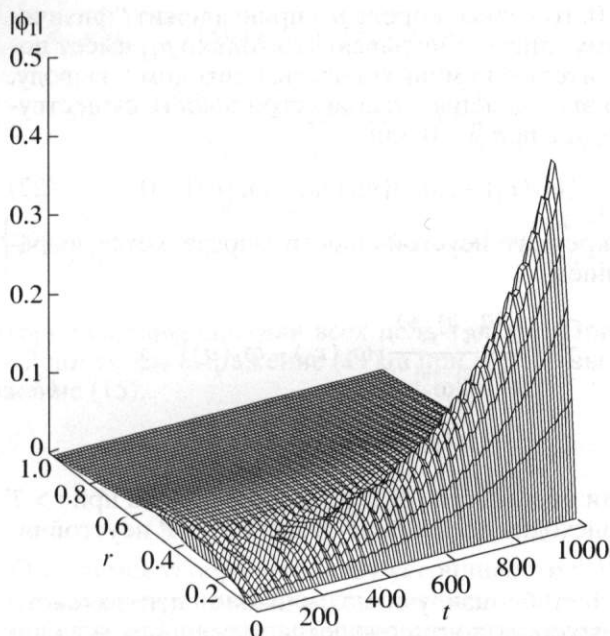


Рис. 12. Амплитуда возмущений потенциала $|\phi_1|$ как функция r и t для профиля плотности, приведенного на рис. 3, но обрезанного на радиусе $a = 0.05$, равном радиусу внутреннего проводника. Значение Q на внутреннем проводнике соответствует общему заряду частиц внутри радиуса $r = 0.05$ для профиля плотности на рис. 3.

ветствует (по крайней мере, для случая $l = 1$) интервалу значений $\omega_E(r)$.

Расчеты спектра (в частности, существование неустойчивого решения) подтверждаются численным решением начальной задачи для линеаризованной системы дрейфовых уравнений Пуассона. В численном коде величины $\omega_E(r)$ и $n_0'(r)$ использовались как входные данные. Затем решение находилось на равномерной по радиусу сетке в интервале между a и R . На каждом временном шаге решалось радиальное уравнение Гельмгольца для гармоники $l = 1$ возмущений потенциала с граничными условиями $\phi_1 = 0$ при $r = a$ и $r = R$.

Собственная функция, соответствующая неустойчивой моде $l = 1$ для профиля плотности, показанного на рис. 13, представлена на рис. 15. Отметим, в частности, что она отлична от нуля во всем интервале $r \in [a, R]$. В противоположность этому, нейтрально устойчивые собственные колебания (соответствующие, например, ступенчатому профилю плотности, рассмотренному в подразд. 3.3) расположены внутри резонансного радиуса, как это следует из выражения (12). "Собственная функция" непрерывного спектра претерпевает разрыв на резонансном радиусе, где $\omega = \omega_E(r)$ [33]. Представляет интерес сравнить эти результаты с результатами, полученными для ступенчатого профиля плотности. В этом случае можно вычис-

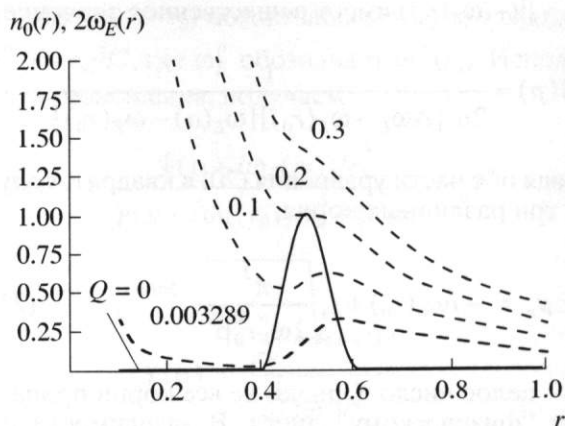


Рис. 13. Обобщенный параболический профиль плотности (сплошная линия) и профили частоты электрического дрейфа (пунктирные линии). Плотность плазмы равна $n_e = [1 - (r - r_c)^2 / r_p^2]^2$ внутри интервала $|r - r_c| < r_p$, где $r_c = 0.5$ и $r_p = 0.1$; вне этого интервала $n_e = 0$. Профили частоты дрейфа рассчитаны для $a = 0.1$ и различных значений Q , указанных на рисунке.

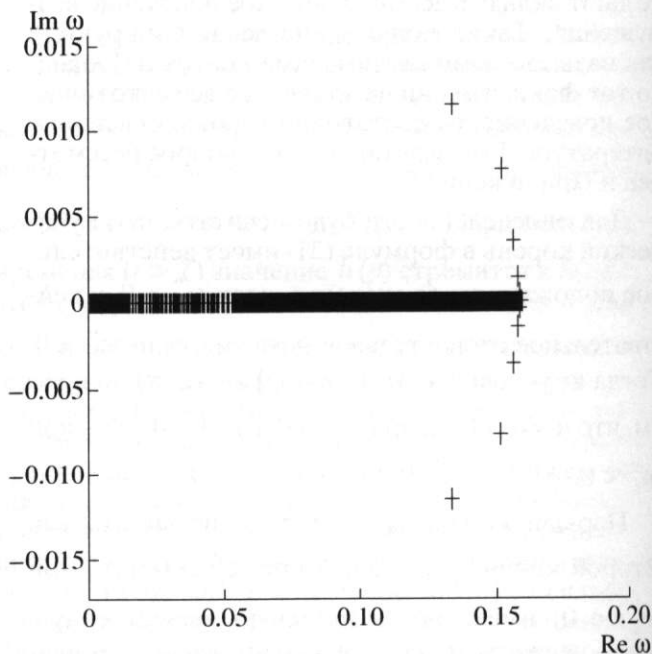


Рис. 14. Частотный спектр для профиля плотности, приведенного на рис. 13, для $Q = 0$ и различных значений a : 0.2, 0.1, 0.05, 0.025 и 0.001 (ближайшее к оси $\text{Re } \omega$). Решения показаны точками. Непрерывный спектр лежит на оси $\text{Re } \omega$ в интервале между 0 и $\omega_E(r_0)$. Заданному a соответствует пара сопряженных дискретных частот. При $a \rightarrow 0$ они сходятся к $\omega_E(r_0)$ на верхней границе непрерывного спектра. Устойчивые решения ($\text{Im } \omega < 0$) не принадлежат "физическому" листу поверхности Римана.

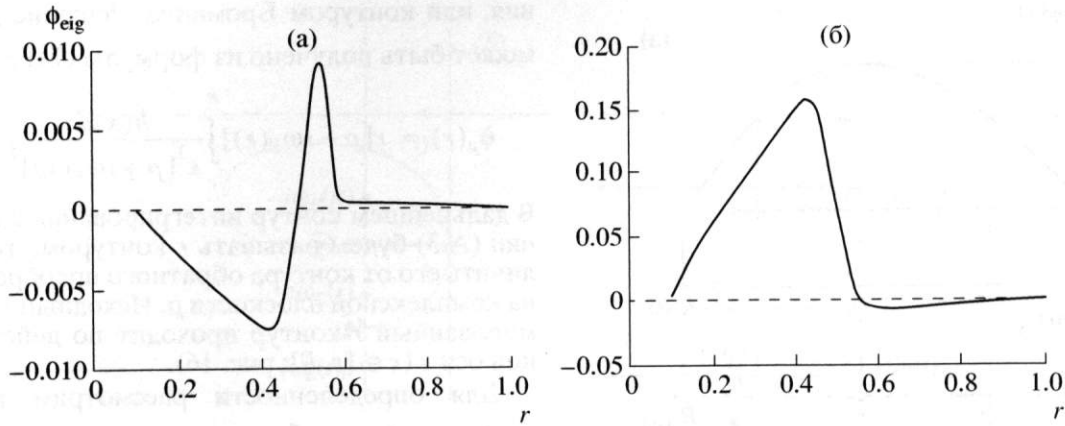


Рис. 15. Собственная функция $\phi_{\text{eig}}(r)$ (в отн. ед.) дискретной неустойчивой моды для обобщенного параболического профиля плотности, приведенного на рис. 13, при $Q = 0$ и $a = 0.1$: а – действительная часть, б – мнимая часть. Устойчивая мода с комплексно-сопряженной частотой ω^* имеет комплексно-сопряженную собственную функцию $\phi_{\text{eig}}(r)^*$. Устойчивая мода не принадлежит “физическому” листу поверхности Римана.

лить дискретный спектр аналитически (см., например, [8–10]). В частности, для ступенчатого профиля плотности, расположенного между $r = 0.4$ и 0.6 ($n_0 = 1$) и внутреннего проводника радиуса $a = 0.1$ дискретный спектр содержит две нейтрально устойчивые моды, $\omega_1 = 0.10$ и $\omega_2 = 0.26$. Экспоненциально неустойчивое решение появляется при $Q = 0.0176$; с увеличением Q это решение становится все более и более неустойчивым (т.е. инкремент возрастает).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что в бесконечно длинном столбе плазмы с зазорами на радиальном профиле плотности могут развиваться степенные неустойчивости, при которых возмущения нарастают со временем пропорционально $t^{1-1/m}$ (где $m \geq 3$ – порядок стационарной точки на профиле частоты вращения) или даже пропорционально t . Эти неустойчивости развиваются быстрее, чем известная СР неустойчивость.

Обнаружено, что сглаживание скачков плотности в односвязной плазме приводит к превращению мод, нарастающих по степенному закону, в моды, экспоненциально затухающие при больших временах. Рассчитаны декременты затухания этих мод.

Показано, что наличие дополнительного внутреннего проводника (даже очень тонкого и незаряженного) может превратить степенную СР неустойчивость в экспоненциальную при больших временах; при этом на начальной стадии эволюции неустойчивость по-прежнему носит степенной характер. Эти результаты подтверждены

численным решением линеаризованной системы дрейфовых уравнений Пуассона (1).

Отметим, наконец, что развитая нами аналитическая теория успешно решает задачу о стратифицированном течении с точкой перегиба. Она позволяет проследить описанные выше превращения мод. В литературе, если и известно, то очень немного явных решений этой задачи. Качественное предсказание медленной неустойчивости вблизи точки перегиба содержится в обзорной статье Тимофеева [14]. Полученные нами результаты подтверждают это предсказание.

ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Неустойчивость Смита–Розенблюта

В этом приложении в явном виде выполнено обратное преобразование Лапласа (8а) от функции (7а). Результат преобразования совпадает с выражением (11), полученным другим способом в подразд. 3.2. Представленный метод (с некоторыми изменениями) будет использован в Приложении Б для исследования асимптотического поведения линейных возмущений в цилиндрической ловушке Пеннинга с внутренним проводником. Также вводится понятие “физического” листа поверхности Римана, использованное в разд. 4 при выведении критерия устойчивости.

Нашей целью является вычисление интеграла (8а)

$$\phi_1(r, t) = \int_{-i\infty + \sigma}^{+i\infty + \sigma} \frac{dp}{2\pi i} \phi_p(r) e^{pt}, \quad (\text{A.1})$$

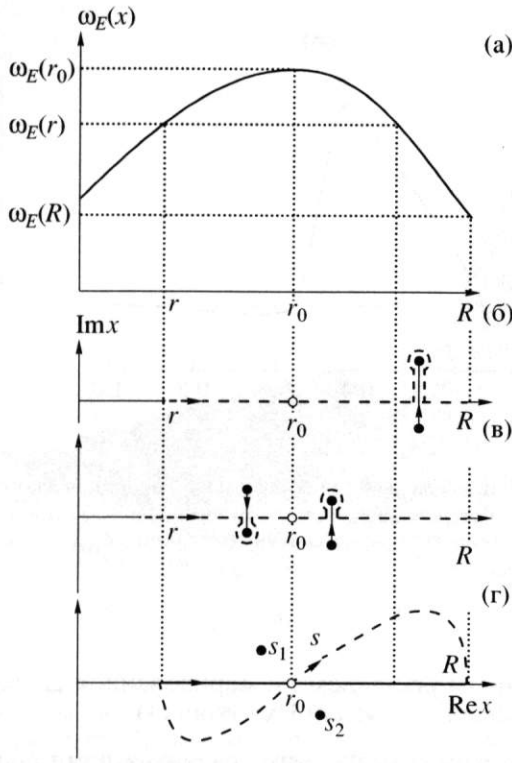


Рис. 16. Схематическое изображение профиля частоты дрейфа $\omega_E(x)$ с точками перегиба и r -контур интегрирования на комплексной плоскости x в формуле (А.3). Если точка перегиба r_0 лежит внутри интервала интегрирования, то $\omega_E(x)$ – немонотонная функция x на интервале интегрирования (см. график (а)). Исходный r -контур проходит вдоль оси $\text{Re}x$ (штриховая линия, графики (б)–(г)). Он обходит образ x_p переменной преобразования Лапласа p , определяемый соотношением $p = -i\omega_E(x_p)$, по мере приближения точки x_p к r -контур (график (б)). Если $\omega_E(r) < \omega_E(x_p) < \omega_E(r_0)$ вблизи оси $\text{Re}x$, то существуют два образа, поскольку $\omega_E(x)$ дважды принимает любое значение между $\omega_E(r)$ и $\omega_E(r_0)$ при движении вдоль r -контура по оси $\text{Re}x$ (график (в)). Деформированный r -контур, удобный для исследования асимптотического поведения обратного преобразования Лапласа, пересекает ось $\text{Re}x$ в точке перегиба r_0 под углом $+45^\circ$ в случае $\omega_E''(r_0) < 0$ (график (г)). Изменение знака частоты $\omega_E \rightarrow -\omega_E$ соответствует отражению деформированного контура относительно оси $\text{Re}x$ (на рисунке не показано).

где σ – положительное действительное число, а $\phi_p(r)$ – прямое преобразование Лапласа, определяемое выражением

$$\phi_p(r) = \int_0^\infty \phi_1(r, t) e^{-pt} dt. \quad (\text{А.2})$$

Будем называть контур интегрирования в выражении (А.1) контуром обратного преобразова-

ния, или контуром Бромвича. Решение для $\phi_p(r)$ может быть получено из формулы (7а) с $\bar{h}(p) \equiv 0$:

$$\phi_p(r) = r[p + i\omega_E(r)] \int_r^R \frac{h(x) dx}{x^3 [p + i\omega_E(x)]^2}. \quad (\text{А.3})$$

В дальнейшем контур интегрирования в выражении (А.3) будем называть r -контуром, чтобы отличить его от контура обратного преобразования на комплексной плоскости p . Исходный недеформированный r -контур проходит по действительной оси $x \in [r, R]$; рис. 16).

Для определенности рассмотрим профиль $\omega_E(r)$, такой что $\omega_E''(r_0)$ отрицательна в стационарной точке r_0 , где $\omega_E' = 0$. Конечный результат будет записан в форме, справедливой для любого знака $\omega_E''(r_0)$. Смена знака ω_E соответствует отражению рисунков, приведенных в этом Приложении, относительно горизонтальной (вещественной) оси.

Преобразование Лапласа (А.3) – аналитическая функция переменной p в правой части комплексной плоскости p . Это следует из обсуждения выражений (9) в начале подразд. 3.2, где подчеркивается, что любое начальное возмущение не может нарастать быстрее, чем t . Сингулярность на плоскости p в точке с $\text{Re}p > 0$ соответствовала бы экспоненциальной неустойчивости.

Преобразование Лапласа (А.3) есть многозначная функция p . Чтобы доказать это, рассмотрим контур на плоскости p , проходящий через мнимую ось $\text{Im}p$ (рис. 17а). Штриховой линией показан разрез, который является проекцией $p(x) \equiv -i\omega_E(x)$ r -контура интегрирования в формуле (А.3) ($x \in [r, R]$) на плоскость p . При приближении p к разрезу в подынтегральном выражении в формуле (А.3) появляется сингулярность. Рассмотрим теперь траекторию в плоскости p , который начинается в правой полуплоскости. Ее начальную точку можно считать принадлежащей контуру обратного преобразования. Если на пути траектории встречается разрез (как это имеет место для траектории I на рис. 17а), то разрез должен обходить конечную точку траектории, чтобы избежать сингулярности в подынтегральном выражении. Следовательно, r -контур в плоскости x должен обходить полюс $x = x_p$, где $p = -i\omega_E(x_p)$ (рис. 16б). Обозначим значение, которое принимает преобразование Лапласа в конечной точке траектории в левой половине плоскости p , через $\phi_p^{(1)}(r)$. Если траектория приходит в ту же конечную точку, обходя разрез, например, по пути 0, то преобразование Лапласа принимает другое значение $\phi_p^{(0)}(r)$. Эти два значения отличаются на величину вычета в полюсе $x = x_p$; при этом вычет ра-

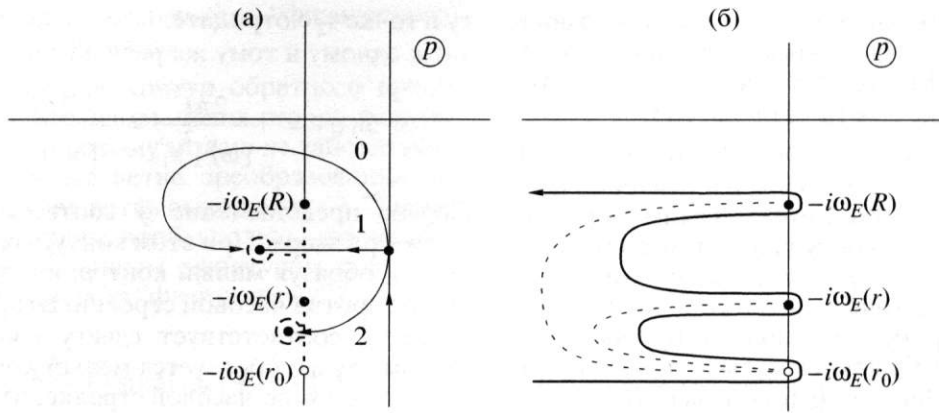


Рис. 17. Контур интегрирования в комплексной плоскости p : а – исходный контур, б – деформированный контур. Разрез (пунктирная линия) проходит вдоль проекции $p(x) = -i\omega_E(x)$ контура интегрирования в плоскости x (рис 16).

вен значению интеграла в формуле (А.3) по малому контуру, охватывающему полюс.

Двигаясь по траектории 2, подходящему к разрезу между точками $p = -i\omega_E(r)$ и $p = -i\omega_E(r_0)$, получаем третье значение $\phi_p^{(2)}(r)$, так как r -контур обходит две проекции x_p точки p на комплексную плоскость x , поскольку $\omega_E(x)$ дважды принимает любое значение между $\omega_E(r)$ и $\omega_E(r_0)$ на невозмущенном контуре (рис. 16в).

Легко видеть, что выражение (А.3) есть многозначная функция и в правой части плоскости p . Это следует из того, что контуры 0 и 1 (или 2) составляют замкнутый контур, каждая точка которого может рассматриваться как начальная или конечная точка в приведенном выше рассуждении. Очевидно, что точки $-i\omega_E(R)$, $-i\omega_E(r)$ и $-i\omega_E(r_0)$ в комплексной плоскости p играют особую роль. В дальнейшем будем называть их точками ветвления.

Любой дополнительный оборот вокруг точки ветвления добавляет один или несколько вычетов, поэтому ветви $\bar{\phi}_1(r)$ преобразования Лапласа связаны с основной ветвью $\phi_1^{(0)}(r)$ выражением

$$\bar{\phi}_1(r) = \phi_1^{(0)}(r) + r[p + i\omega_E(r)] \sum_s n_s \text{res}_{x_{p,s}} \left[\frac{h(x)}{x^3 [p + i\omega_E(x)]^2} \right],$$

где n_s – целое число, а суммирование идет по всем полюсам. В общем случае число ветвей бесконечно. Важное исключение из последнего утверждения представляет собой ступенчатый профиль плотности. В этом случае все вычеты в приведенном выше выражении равны нулю, и преобразо-

вание Лапласа является однозначной функцией p . Заметим, что любое численное моделирование фактически имеет дело со ступенчатым профилем.

Чтобы продвинуться дальше в наших рассуждениях, необходимо выделить ветвь преобразования Лапласа (А.3), которую следует подставить в обратное преобразование Лапласа (А.1). Выбор необходимой ветви определяется условием того, что контур интегрирования в формуле (А.3) проходит точно вдоль оси $\text{Re}x$ для любых p , таких что $\text{Re}p > 0$. Это фактически является общим свойством решения начальной задачи с использованием преобразования Лапласа. Действительно, интеграл в (А.2) должен по меньшей мере сходиться. Для этого нужно, чтобы действительная часть p была положительна и достаточно велика. Это также объясняет, почему контур обратного преобразования должен обходить справа все сингулярные точки подынтегрального выражения и точки ветвления в формуле (А.1).

Контур обратного преобразования в плоскости p показан на рис. 17а сплошной линией, параллельной оси $\text{Im}p$. Стандартным методом определения асимптотического поведения выражения (А.1) при $t \rightarrow \infty$ является смещение контура как можно дальше влево. При этом крайние правые части контура обратного преобразования вносят наибольший вклад в интеграл в выражении (А.1), поскольку подынтегральная функция содержит множитель e^{pt} . Сдвинутый контур охватывает разрез и, возможно, другие сингулярности преобразования Лапласа в левой части плоскости p .

Для нахождения асимптотического поведения разрез также нужно сдвинуть как можно дальше влево. Чтобы сдвинуть разрез, необходимо деформировать r -контур на плоскости x , как это показано на рис. 16. Концы разреза $p = -i\omega_E(r)$ и $p = -i\omega_E(R)$ не могут быть удалены с оси $\text{Im}p$, так

как они соответствуют реальной точке r и граничным условиям, накладываемым на внешнем проводящем цилиндре. Еще одна точка $p = -i\omega_E(r_0)$, которая также не может быть удалена, соответствует стационарной точке r_0 в плоскости x , где $\omega_E' = 0$. Сдвиг точки с оси $\text{Re}x$ в любом направлении привел бы к увеличению $\text{Re}p(x)$. Таким образом, крайние левые части контура обратного преобразования в плоскости p охватывают эти точки ветвления. Другие точки, которые должны быть охвачены контуром, — это полюса преобразования Лапласа $\phi_p(r)$. Однако, как было показано выше, слева от оси $\text{Im}p$ таких полюсов нет.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением вклада стационарной точки r_0 . Раскладывая знаменатель выражения (А.3) в ряд по малому расстоянию $s = x - r_0$, из формулы (А.1) получаем

$$\begin{aligned} \phi_1(r, t) = r[h(r_0)/r_0^3] \int_{Br} \frac{dp e^{pt}}{2\pi i} [p + i\omega_E(r)] \times \\ \times \int_{r-r_0}^{\infty} ds [p + i\omega_E(r_0) + i\omega_E'' s^2/2]^{-2}, \end{aligned} \quad (\text{А.4})$$

где Br — контур обратного преобразования, а ω_E'' обозначает величину $\omega_E''(r_0)$. Так как нас интересует асимптотическое поведение при больших временах (таких, что $|\omega_E''|(r-r_0)^2 t \gg 1$) можно заменить нижний предел интегрирования $r-r_0$ во внутреннем интеграле в формуле (А.4) на $+\infty$ или $-\infty$ в зависимости от знака $r-r_0$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \phi_1(r, t) = r[h(r_0)/r_0^3] H(r_0 - r) \times \\ \times \int_{Br} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} [p + i\omega_E(r)] \mathcal{F}(p + i\omega_E(r_0)), \end{aligned} \quad (\text{А.5})$$

где

$$\mathcal{F}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{[\sigma + i\omega_E'' s^2/2]^2}. \quad (\text{А.6})$$

Функция $\mathcal{F}(\sigma)$ имеет две ветви, соответствующие двум полюсам $s_{1,2} = \pm \sqrt{2i\sigma/\omega_E''}$ подынтегрального выражения в комплексной плоскости s . Для определенности положим, что полюс s_1 изначально расположен над r -контуром на плоскости x , а полюс s_2 — под ним (рис. 16). Из обычной теории вычетов следует, что интеграл (А.6) равен вычету в точке s_1 с положительным знаком или выче-

ту в точке s_2 с отрицательным знаком, что приводит к одному и тому же результату:

$$\mathcal{F}(\sigma) = + \frac{2\pi i}{[\omega_E'' s_1^2]^2} = - \frac{2\pi i}{[\omega_E'' s_2^2]^2}. \quad (\text{А.7})$$

Первое представление \mathcal{F} соответствует сдвигу r -контура вверх. При этом контур охватывает полюс s_1 , образуя малый контур, который обходит полюс против часовой стрелки. Второе представление \mathcal{F} соответствует сдвигу r -контура вниз. В этом случае образуется малый контур, обходящий полюс s_2 по часовой стрелке, что приводит к знаку минус во второй строке формулы (А.7).

Представим теперь, что σ совершает один оборот вокруг точки $\sigma = 0$ в комплексной плоскости σ , т.е. $\arg \sigma$ возрастает на 2π . Тогда полюс s_1 (с малым контуром вокруг него) сдвигается в нижнюю полуплоскость s и занимает место полюса s_2 , в то время как полюс s_2 занимает место полюса s_1 в верхней полуплоскости. При этом направление обхода меняется на противоположное: замкнутый контур теперь обходит верхний полюс по часовой стрелке, а нижний полюс — против часовой стрелки. Соответственно $\mathcal{F}(\sigma)$ изменяет свой знак. Функция $\mathcal{F}(\sigma)$ является однозначной на поверхности Римана, составленной из двух σ плоскостей, которые склеены таким образом, что $\arg \sigma$ пробегает интервал 4π .

При альтернативном подходе разрез проводится из $\sigma = 0$ в комплексную бесконечность и вводятся две ветви $\mathcal{F}(\sigma)$, соответствующие двум листам поверхности Римана. Вторая ветвь $\mathcal{F}(\sigma)$ отличается от выражения (А.7) знаком. Разрез не позволяет $\arg \sigma$ изменяться более чем на 2π . Аргумент σ испытывает скачок на 2π , когда σ пересекает разрез. Так как скачок приводит к изменению знака $\mathcal{F}(\sigma)$, две ветви $+\mathcal{F}(\sigma)$ и $-\mathcal{F}(\sigma)$ должны быть склеены на противоположных берегах разреза с тем, чтобы функция $\mathcal{F}(\sigma)$ была непрерывной на поверхности Римана.

Выбор явной геометрии разреза — вопрос удобства. Обычно удобно, чтобы разрез проходил справа налево кратчайшим путем, т.е. вдоль оси $\text{Re}x$. Рисунки 18 и 19 показывают плоскость s (которая фактически является малой окрестностью точки $x = r_0$ на плоскости x) и плоскость σ (т.е. малую окрестность точки $p = -i\omega_E(r_0)$ на плоскости p) с разрезом и контуром интегрирования для случая $\omega_E'' < 0$. На рис. 16г также показано положение полюсов $s_{1,2}$ для положительного действительного значения σ .

Как видно из рис. 19, исходный разрез проходит вдоль оси $\text{Im}\sigma$. Деформация r -контура перемещает разрез в положение вдоль левой полуоси $\text{Re}x$. Такой выбор разреза означает, что $\arg \sigma \in (-\pi, \pi)$.

Это условие определяет выбор “физического” листа поверхности Римана.

Деформированный контур обратного преобразования проходит вдоль обеих сторон разреза, не пересекая его, поэтому можно не заботиться о том, как связать две ветви преобразования Лапласа. Необходимая ветвь выражения (А.7) определяется требованием, чтобы полюс s_1 размещался над деформированным r -контуром при условии, что σ принадлежит “физическому” слою, т.е.

$$s_1 = i \left| \frac{2\sigma}{\omega_E''} \right|^{1/2} \exp \left\{ -i \frac{\pi}{4} \text{sign}[\omega_E''] + i \frac{1}{2} \arg \sigma \right\}. \quad (\text{A.8})$$

Следовательно,

$$\mathcal{F}(\sigma) = \frac{\pi \exp \{ -i\pi \text{sign}[\omega_E'']/4 \}}{\sqrt{|2\omega_E''|} |\sigma|^{3/2}}. \quad (\text{A.9})$$

Подставляя (А.9) в (А.5) получаем

$$\phi_1(r, t) = \frac{\pi r h(r_0)}{\sqrt{|2\omega_E''|} r_0^3} H(r_0 - r) e^{-i\pi \text{sign}[\omega_E'']/4} \Phi, \quad (\text{A.10})$$

где

$$\Phi = \int_{Br} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \left\{ \frac{p + i\omega_E(r)}{[p + i\omega_E(r_0)]^{3/2}} \right\}. \quad (\text{A.11})$$

Преобразовывая подынтегральную функцию и производя интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{Br} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \left\{ \frac{i[\omega_E(r) - \omega_E(r_0)]}{[p + i\omega_E(r_0)]^{3/2}} + \frac{1}{[p + i\omega_E(r_0)]^{1/2}} \right\} = \\ &= \int_{Br} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \left\{ 2t \frac{i[\omega_E(r) - \omega_E(r_0)]}{[p + i\omega_E(r_0)]^{1/2}} + \frac{1}{[p + i\omega_E(r_0)]^{1/2}} \right\}. \end{aligned}$$

Вторым членом в скобках можно пренебречь, так как нас интересует поведение возмущений при $t \rightarrow \infty$. Выписывая в явном виде пределы для контура обратного преобразования, легко убедиться, что оставшийся интеграл может быть выражен через гамма-функцию Эйлера Γ :

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{\pi} [\omega_E(r) - \omega_E(r_0)] t e^{-i\omega_E(r_0)t} \times \\ &\times \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{dpe^{pt}}{-i|p|^{1/2}} + \int_0^{\infty} \frac{dpe^{pt}}{+i|p|^{1/2}} \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} [\omega_E(r) - \omega_E(r_0)] t e^{-i\omega_E(r_0)t} \{ 2i\Gamma(1/2)t^{-1/2} \}. \end{aligned}$$

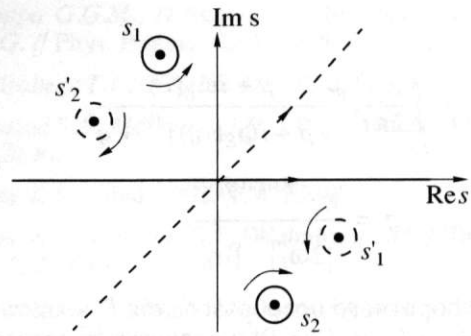


Рис. 18. Контур интегрирования в комплексной плоскости s ($s = x - r_0$). Исходный контур проходит вдоль оси $\text{Re } s$. Деформированный контур (штриховая линия), приведенный для случая $\omega_E'' < 0$, проходит под углом 45° . Контур обходит полюс s_1 или s_2 при смещении соответственно вверх или вниз. Стрелка показывает направления обхода контуров. Один оборот в плоскости σ меняет местами полюса s_1 и s_2 , в результате чего меняются направление обхода и, следовательно, знак преобразования Лапласа (см. формулу (А.5)).

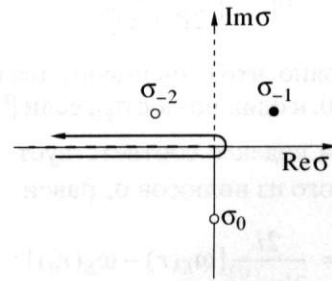


Рис. 19. Исходный (пунктирная линия) и деформированный (штриховая линия) разрез в плоскости σ ($\sigma = p + i\omega_E(r_0)$) для случая $\omega_E'' < 0$. Контур обратного преобразования (сплошная линия) охватывает деформированный разрез и полюса преобразования Лапласа в выражении (Б.2). Полюса σ_0 и σ_{-2} существуют при $\beta > 0$, а полюс σ_{-1} — при $\beta < 0$.

Подставляя этот результат в формулу (А.10) получаем выражение (11).

Б. Экспоненциальная неустойчивость Смита-Розенблюта

В этом приложении вычисляется обратное преобразование Лапласа (8а) применительно к случаю, рассмотренному в подразд. 4. Подставляя формулу (19) в выражение (7а) и используя метод, изложенный в Приложении А, представим выражение (8а) в следующей форме

$$\phi_1(r, t) = \frac{\pi r h(r_0)}{\sqrt{|2\omega_E''|} r_0^3} H(r_0 - r) e^{-i\pi \text{sign}[\omega_E'']/4} \Phi, \quad (\text{Б.1})$$

где

$$\Phi = \int_{Br} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \frac{p + i\omega_E(r)}{[p + i\omega_E(r_0)]^{3/2} + q}, \quad (Б.2)$$

$$q = \frac{\pi e^{-i\pi \text{sign}[\omega_E'']/4}}{|2\omega_E''|^{1/2} \beta r_0^3},$$

а контур обратного преобразования Br охватывает разрез $p + i\omega_E(r_0) \in (-\infty, 0]$ и полюса подынтегральной функции. Производя замену $p = \sigma + i\omega_E(r_0)$ и пренебрегая σ в числителе подынтегральной функции в формуле (Б.2), получаем

$$\Phi = i[\omega_E(r) - \omega_E(r_0)] e^{-i\omega_E(r_0)t} \int_{Br} \frac{d\sigma}{2\pi i} \frac{e^{\sigma t}}{\sigma^{3/2} + q}. \quad (Б.3)$$

Чтобы найти полюса выражения (Б.3), введем обозначение $\sigma_n = i\gamma_0 e^{-2\pi i n/3}$, где n – целое число и

$$\gamma_0 = \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{2\beta^2 r_0^6 \omega_E''}}.$$

В разд. 4 показано, что существуют два полюса σ_0 и $\sigma_{\pm 2}$, если $\beta > 0$, и один полюс $\sigma_{\pm 1}$, если $\beta < 0$. Здесь знак в нижнем индексе соответствует знаку ω_E'' . Вклад от любого из полюсов σ_n равен

$$\Phi_n = \frac{2i}{3|\gamma_0|^{1/2}} [\omega_E(r) - \omega_E(r_0)] \times$$

$$\times \exp\{-i\omega_E(r_0)t + \sigma_n t + i\pi n/3 - i\pi \text{sign}[\omega_E'']/4\}.$$

Если $\beta < 0$, то появляется экспоненциально растущий член $\Phi_{\pm 1}$.

Вклад Φ_{cut} от части контура обратного преобразования, охватывающего разрез $\sigma \in (-\infty, 0]$, может быть вычислен следующим образом. При малых временах ($t < T$) можно пренебречь q в знаменателях выражений (Б.2) и (Б.3). Это приводит к уравнению (А.11), рассмотренному в Приложении А, откуда получаем

$$\Phi_{\text{cut}} = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} [\omega_E(r) - \omega_E(r_0)] t^{1/2} e^{-i\omega_E(r_0)t}. \quad (Б.4)$$

При больших временах ($t > T$) можно разложить подынтегральную функцию по степеням малого отношения $\sigma^{3/2}/q$:

$$\Phi_{\text{cut}} = i[\omega_E(r) - \omega_E(r_0)] e^{-i\omega_E(r_0)t} \times$$

$$\times \int_{Br} \frac{d\sigma}{2\pi i} \frac{e^{\sigma t}}{q} \left[1 - \frac{\sigma^{3/2}}{q} \right]. \quad (Б.5)$$

Интегрирование первого члена в скобках по замкнутому контуру обратного преобразования дает нуль. Оставшийся член убывает как $t^{-5/2}$:

$$\Phi_{\text{cut}} = -\frac{3i}{4\sqrt{\pi}q^2} [\omega_E(r) - \omega_E(r_0)] t^{-5/2} e^{-i\omega_E(r_0)t}. \quad (Б.6)$$

В заключение отметим, что $\Phi_{\text{cut}} \sim \Phi_n$ при $t \sim T$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Malmberg J.H., deGrassie J.S.* // Phys. Rev. Lett. 1975. V. 35. P. 577.
2. *O'Neil T.M., Driscoll C.F.* // Phys. Fluids. 1979. V. 22. P. 266.
3. *Prasad S.A., O'Neil T.M.* // Ibid. 1979. V. 22. P. 278.
4. *O'Neil T.M.* // Ibid. 1980. V. 23. P. 2216.
5. *O'Neil T.M., Dubin D.H.E.* // Phys. Plasmas. 1998. V. 5. P. 2163.
6. *Dubin D.H.E., O'Neil T.M.* // Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71. P. 87.
7. *Kotelnikov I., Pozzoli R., Rome M.* // Phys. Plasmas. 2000. V. 7. P. 4396.
8. *Davidson R.C.* Theory of Nonneutral Plasmas. New York: Benjamin, 1974.
9. *Davidson R.C.* Physics of Nonneutral Plasmas. Redwood City: Addison Wesley, 1990.
10. *Levy R.H.* // Phys. Fluids. 1965. V. 8. P. 1288.
11. *Rosenthal G., Dimonte G., Wong A. Y.* // Ibid. 1987. V. 30. P. 3257.
12. *Rayleigh J.W.S.* // Proc. London Math. Soc. 1880. V. 11. P. 57.
13. *Briggs R.J., Dougherty J.D., Levy R.H.* // Phys. Fluids. 1970. V. 13. P. 421.
14. *Тимофеев А.В.* // Вопросы теории плазмы / Под ред. Б.Б. Кадомцева. Вып. 17. М.: Энергоатомиздат, 1989. С. 157.
15. *Corngold N.R.* // Phys. Plasmas. 1995. V. 2. P. 620.
16. *Spencer R.L., Rasband S.N.* // Ibid. 1997. V. 4. P. 53.
17. *Levy R.H.* // Phys. Fluids. 1968. V. 11. P. 920.
18. *Case K.M.* // Ibid. 1960. V. 3. P. 143.
19. *Дукий Л.А.* // ДАН СССР. 1960. Т. 135. С. 1068.
20. *Timofeev A.V.* // Plasma Phys. 1968. V. 10. P. 235.
21. *Driscoll C.F.* // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 645.
22. *Smith R.A., Rosenbluth M.N.* // Ibid. P. 649.
23. *Rasband S.N., Spencer R.L., Vanfleet R.R.* // Phys. Fluids B. 1993. V. 5. P. 669.

24. *Rasband S.N.* // *Phys. Plasmas*. 1996. V. 3. P. 94.
25. *Smith R.A.* // *Phys. Fluids B*. 1992. V. 4. P. 287.
26. *Finn J.M., del-Castillo-Negrete D., Barnes D.C.* // *Phys. Plasmas*. 1999. V. 6. P. 3744.
27. *Kabantsev A.A., Driscoll C.F.* // *Proc III Conf. on Non-Neutral Plasma Physics*. Princeton, NJ, 1999 / Ed. by J.J. Bollinger, R.L. Spencer and R.C. Davidson. New York: AIP, 1999. P. 208; *AIP Conf. Proc.* 1999. V. 498. P. 208.
28. *Coppa G.G.M., D'Angola A., Delzanno G.L., Lapenta G.* // *Phys. Plasmas*. 2001. V. 8. P. 1133.
29. *Hilsabeck T.J., O'Neil T.M.* // *Ibid.* P. 407.
30. *Prasad S.A., Malmberg J.H.* // *Phys. Fluids*. 1986. V. 29. P. 2196.
31. *Fine K.S.* // *Ibid.* 1992. V. 4. P. 3981.
32. *Fine K.S., Driscoll C.F., Malmberg J.H.* // *Ibid.* 1992. V. 4. P. 3981.
33. *Schechter D.A., Dubin D.H., Cass A.C. et al.* // *Ibid.* 2000. V. 12. P. 2397.